c) Como se tornaria o modelo *a)*, supondo-se que a empresa tenha um contrato de produção de L_1 e L_2 unidades dos Licores X e Y, respectivamente. Caso a produção fique aquém da contratada, para qualquer um dos Licores, ela pagará uma multa de $ 1 por unidade não produzida; caso os níveis de produção ultrapassem a contratada, as unidades excedentes serão vendidas com um preço $ 1 inferior ao preço contratual, ou seja, $ 2 para o Licor X e $ 1.50 para o Licor Y. (*Sugestão:* Introduza variáveis que meçam a discrepância entre a produção real e a meta);

d) Como ficaria o caso *c)*, se a penalidade por insuficiência de produção fosse k_1 e k_2 por unidade e, no caso de excesso de produção, s_1 e s_2 por unidade, respectivamente, para os Licores X e Y.

Método Simplex

Capítulo 3

3.1. Introdução

Neste capítulo desenvolver-se-á a técnica utilizada para achar, algebricamente, a solução ótima de um modelo de programação linear. O processo que realiza tal tarefa tem o nome de *método simplex.*

O método simplex baseia-se em três teoremas, que serão enunciados e demonstrados.

Utilizar-se-á, no desenvolvimento deste capítulo, o modelo (2.2) para que se possa comparar, passo a passo, os resultados algébricos com os obtidos, graficamente, no Cap. 2.

3.2. Forma Padrão da Programação Linear

A forma padrão do problema de programação linear com m restrições e n variáveis pode ser representada como segue, com os coeficientes do lado direito necessariamente não negativos ($b_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, m$).

$$
\begin{array}{ll}
\text{Máx.} & Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{(ou Min.)} & \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0
\end{array}
\tag{3.1}
$$

Na notação matricial, a forma padrão é representada por:

$$\begin{array}{ll} \text{Máx. (ou Min.)} & Z = cx \\ \text{sujeito a} & Ax = b \\ & x \geqslant 0 \end{array}$$

onde:

A = matriz (mXn) dos coeficientes tecnológicos
x = vetor coluna (nX1) das variáveis de decisão
b = vetor coluna (mX1) do lado direito das restrições, $b \geqslant 0$, ou vetor dos recursos disponíveis
c = vetor linha (1Xn) dos lucros (ou custos)

O método simplex, a ser apresentado adiante, exige que o problema esteja na forma padrão. Esta exigência não constitui uma limitação, pois todo sistema linear pode ser colocado na forma padrão, mediante operações simples, conforme será visto no item seguinte.

3.3. Transformação de um Problema Geral Para a Forma Padrão

3.3.1 DESIGUALDADE DO TIPO MENOR OU IGUAL

Suponha que certa restrição do sistema seja:

$$x_1 \leqslant 3$$

Introduzindo-se a variável de folga $x_3 \geqslant 0$:

$$x_1 + x_3 = 3$$

Denomina-se de *sistema canônico* aquele em que todas as restrições são do tipo menor ou igual. Matricialmente, o sistema canônico é representado por:

$$\begin{array}{lll} \text{Máx. (ou Min.):} & Z = cx & \text{sujeito a} \\ & Ax \leqslant b\ (b \geqslant 0) & \\ & x \geqslant 0 & \end{array} \qquad (3.2)$$

Os sistemas na forma canônica são muito vantajosos para a aplicação do método simplex, pelas seguintes razões:

i) – a passagem para a forma padrão se faz pelo simples acréscimo de uma variável de folga para cada equação;

ii) – a forma padrão resultante sempre consiste num sistema que tem uma solução básica óbvia, que corresponde a zerar as variáveis originais e resolver o problema em relação às variáveis de folga.

Exemplo:

Acrescentar variáveis de folga ao sistema (2.2): (pg 56)

$$\begin{array}{llllll} \text{Máx.} & Z = 5x_1 + 2x_2 & & & \text{sujeito a} & \\ & x_1 & + x_3 & & & = 3 \\ & x_2 & & + x_4 & & = 4 \\ & x_1 + 2x_2 & & & + x_5 & = 9 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 & & & & \end{array} \qquad (3.3)$$

A solução básica óbvia desse sistema é a seguinte:

$$\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 9 \end{array}$$

Como há uma correspondência entre a definição dada em (3.2) e o sistema exemplificado em (3.3), muitos autores denominam de sistema canônico todo aquele na forma (3.3). Assim, para esses autores, o sistema $Ax = b$ é dito canônico se:

i) $b \geqslant 0$
ii) a cada equação está associada uma variável, com coeficiente unitário nesta equação e coeficiente zero nas demais equações, que é a variável básica.

3.3.2 DESIGUALDADE DO TIPO MAIOR OU IGUAL

Suponha que certa restrição do problema seja:

$$x_2 \geqslant 9$$

Introduzindo-se a variável de excesso, $x_4 \geqslant 0$:

$$x_2 - x_4 = 9$$

3.3.3 VARIÁVEL SEM RESTRIÇÃO DE SINAL

Suponha que uma certa variável x_2 possa assumir valores positivos ou negativos. Nesse caso ela deve ser substituída por:

$$x_2 = x_2' - x_2''$$

aonde:

$$x_2' \geqslant 0 \quad \text{e} \quad x_2'' \geqslant 0.$$

3.3.4 LADO DIREITO NEGATIVO

Neste caso, basta multiplicar a expressão por (–) 1.

3.3.5 TRANSFORMAÇÃO DE UMA IGUALDADE

Uma igualdade pode ser escrita como duas desigualdades. Assim, $x_1 = 9$ equivale a:

$$\begin{cases} x_1 \leqslant 9 \\ x_1 \geqslant 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x_1 \leqslant 9 \\ -x_1 \leqslant -9 \end{cases}$$

3.3.6 EQUIVALÊNCIA ENTRE MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

Sabe-se que o mínimo de uma função é equivalente ao máximo do simétrico dessa função. Assim:

$$\text{MIN} \quad 3x_1 + 4x_2 - x_3$$

equivale a:

$$\text{MAX} \quad -3x_1 - 4x_2 + x_3$$

Exemplo:

Transformar o sistema, a seguir, para a forma padrão:

MAX $Z = 2x_1 + 3x_2 - x_3$ sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 - x_3 &\leqslant 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant -4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= -7 \\ x_1, x_3 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

x_2 sem restrição de sinal

São necessárias as seguintes operações:

a) substituir x_2 *por* $x_2' - x_2''$;
b) incluir a variável de folga x_4 na inequação 1 e a variável de excesso x_5 na inequação 2;
c) multiplicar por (–) 1 a inequação 2 e a equação 3.

que permitirão a obtenção da seguinte forma padrão:

MAX $Z = 2x_1 + 3x_2' - 3x_2'' - x_3$ sujeito a:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2' + 2x_2'' - x_3 + x_4 \quad &= 1 \\ -x_1 - x_2 + x_2'' - x_3 \quad + x_5 &= 4 \\ -5x_1 + 3x_2' - 3x_2'' - 4x_3 \quad &= 7 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2', x_2'', x_3, x_4, x_5 \geqslant 0$$

3.4. Definições

Dado o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} &\text{MAX (ou MIN):} & Z &= cx \\ &\text{sujeito a} & Ax &= b \\ & & x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

onde A (mXn), x (nX1), b (mX1), c (1Xn), $n > m$, $r_A = m$ e $b \geqslant 0$, define-se:

a) uma solução factível, compatível ou viável é um vetor x que satisfaz as condições $Ax = b$ e $x \geqslant 0$;

b) região factível, viável ou compatível é o conjunto de todas as soluções factíveis; se essa região é vazia, o programa linear é impossível ou inviável;

c) solução básica para $Ax = b$ é uma solução obtida fazendo $n - m$ variáveis iguais a zero (variáveis não básicas) e resolvendo em relação às demais (variáveis básicas);

d) uma solução básica factível é uma solução básica que também satisfaz $x \geqslant 0$; ela será ainda dita degenerada se alguma variável básica for nula;

e) solução ótima é um vetor factível x^* que otimiza o valor da função objetivo, $Z^* = cx^*$; essa solução pode ser única ou podem haver ótimos alternativos x_1^* e x_2^*, quando $Z^* = cx_1^* = cx_2^*$;

f) solução ilimitada (MAX $Z \to +\infty$ ou MIN $Z \to -\infty$) é aquela em que há uma região factível, mas o ótimo não é finito.

3.5. Teoremas Fundamentais

Neste item serão enunciados e demonstrados os três teoremas nos quais o método simplex se baseia para que se possa entender, perfeitamente, o seu funcionamento.

3.5.1 TEOREMA I

"O conjunto de todas as soluções factíveis do modelo de programação linear é um conjunto convexo".

Seja C o conjunto formado pelos pontos x tais que:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Tem-se que provar que o conjunto C é convexo. Para isso, basta demonstrar que dados dois pontos distintos, x_1 e x_2 de C, qualquer ponto x, obtido como uma combinação linear convexa desses pontos, também pertence a C. Isto pode ser indicado pela expressão (3.4):

$$\left.\begin{matrix} x_1 \in C \\ \\ x_2 \in C \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{matrix} x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \in C \\ \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{matrix}\right. \tag{3.4}$$

Para demonstrar a relação (3.4), sejam x_1 e x_2 duas soluções factíveis quaisquer ($x_1 \neq x_2$), então:

$$\left\{\begin{matrix} Ax_1 = b \\ \\ x_1 \geqslant 0 \end{matrix}\right. \quad \text{e} \quad \left\{\begin{matrix} Ax_2 = b_2 \\ \\ x_2 \geqslant 0 \end{matrix}\right.$$

Considere-se, agora, o vetor

$$\begin{gathered} x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \\ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \end{gathered}$$

Tem-se que provar que:

$$Ax = b \tag{3.5}$$

$$x \geqslant 0 \tag{3.6}$$

A relação (3.5) é assim demonstrada:

$$\begin{aligned} Ax = A[\alpha x_1 + (1-\alpha) x_2] = \alpha A x_1 + (1-\alpha) A x_2 = \\ = \alpha b + (1-\alpha) b = b \end{aligned}$$

enquanto que para a expressão (3.6):

$$x = \alpha x_1 + (1-\alpha) x_2 \geqslant 0$$

uma vez que

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \quad \text{e} \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

3.5.2 TEOREMA II

"Toda solução factível básica do sistema $Ax = b$ é um ponto extremo do conjunto das soluções factíveis, isto é, do conjunto convexo C do Teorema I."

Considere-se o conjunto convexo C formado pelos pontos x tais que:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ x &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Seja a solução factível básica formada pelo vetor x, de dimensão n, na qual, sem perda de generalidade, as variáveis básicas são as m primeiras:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \text{todos os } x_i \geqslant 0. \tag{3.8}$$

Suponha, por absurdo, que x não seja um ponto extremo do conjunto C, definido por (3.7). Então x pode ser obtido como uma combinação convexa de outros dois pontos distintos desse mesmo conjunto. Sendo y e z esses dois pontos, então, tem-se:

$$x = \alpha y + (1 - \alpha) z \tag{3.9}$$

$$0 \leqslant \alpha \leqslant 1$$

Como y e z pertencem ao conjunto C, definido por (3.7), as seguintes relações são válidas:

$$\begin{cases} Ay = b \\ y \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Az = b \\ z \geqslant 0 \end{cases}$$

A relação (3.9), colocada em termos das coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha y_1 + (1 - \alpha) z_1 \\ x_2 &= \alpha y_2 + (1 - \alpha) z_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= \alpha y_m + (1 - \alpha) z_m \\ 0 &= \alpha y_{m+1} + (1 - \alpha) z_{m+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0 &= \alpha y_n + (1 - \alpha) z_n \end{aligned} \tag{3.10}$$

Devido às relações $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $y \geqslant 0$ e $z \geqslant 0$, as últimas $(n-m)$ relações de (3.10) só podem ser satisfeitas num dos seguintes casos:

1.º) $0 < \alpha < 1$ e $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$ para $i = 1, \ldots, n - m$.

Neste caso ter-se-ia $x = y = z$ pois tanto y quanto z são soluções básicas do sistema (3.7), calculados com as mesmas variáveis básicas. Conseqüentemente, seus valores serão os mesmos e iguais para as três soluções.

2.º) $\alpha = 0$ e $z_{m+i} = 0$ para $i = 1, \ldots, n - m$.

Neste caso ter-se-ia $x = z$ por razões idênticas às anteriores. Além disso, como $\alpha = 0$, segue-se que $x = y = z$.

3.º) $\alpha = 1$ e $y_{m+i} = 0$ para $i = 1, \ldots, n - m$;

Por razões análogas, conclui-se que $x = y = z$.

Fica assim demonstrado que não existem soluções factíveis y e z, distintas da solução factível básica x, que satisfaçam a relação (3.9). Então, o ponto x é um ponto extremo do conjunto convexo C.

Pode-se também demonstrar o *teorema inverso*, ou seja: "todo ponto extremo do conjunto das soluções factíveis corresponde a uma solução factível básica."

Corolário. "O Conjunto de pontos extremos do conjunto das soluções factíveis é finito."

Demonstração. Dado o sistema $Ax = b$, seja m o posto de A.

Dos n vetores coluna de A existem, no máximo, $C_n^m = \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}$ soluções básicas distintas. Pelo teorema II e seu inverso, o número de pontos extremos é também limitado a C_n^m.

Corolário. "Se existe uma solução factível, então existe também uma solução factível básica."

Demonstração. A existência de uma solução factível equivale a supor que o conjunto C não é vazio. Como C é convexo, todos os pontos podem ser expressos como combinações lineares de seus pontos extremos, os quais correspondem à solução factíveis básicas.

3.5.3. TEOREMA III

a) "Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C do Teorema I."

b) "Se a função objetivo assume o máximo (mínimo) em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos."

Demonstração. *a*) Seja C o conjunto convexo definido por (3.7).

Seja $Z(x)$ a função objetivo que toma o valor máximo M no ponto x_0, então pode-se afirmar que:

$$M = Z(x_0) \geqslant Z(x) \text{ para todo } x \in C$$

Sejam $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_p$ os pontos extremos do conjunto C. Tem-se de provar que x_0 é um desses pontos extremos.

Suponha que x_0 não seja um ponto extremo de C. Então, ele pode ser obtido pela combinação convexa de seus pontos extremos:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{x}_i$$

sendo

$$\alpha_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, p) \qquad (3.11)$$

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1.$$

Usando as relações (3.11) pode-se obter

$$Z(x_0) = Z\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \overline{x}_i\right) = Z(\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_p \overline{x}_p) =$$

$$= \alpha_1 Z(\overline{x}_1) + \alpha_2 Z(\overline{x}_2) + \ldots + \alpha_p Z(\overline{x}_p) = M. \qquad (3.12)$$

Considere-se agora o ponto extremo $\overline{x}_M$ definido pela relação abaixo:

$$Z(\overline{x}_M) = \text{máx. } Z(\overline{x}_i) \qquad (3.13)$$

$$i = 1, \ldots, p.$$

Devido às relações (3.11) e (3.13) a relação (3.12) pode sofrer as seguintes modificações:

$$Z(x_0) \leqslant \alpha_1 Z(\overline{x}_M) + \alpha_2 Z(\overline{x}_M) + \ldots + \alpha_p Z(\overline{x}_M)$$

ou seja,

$$Z(x_0) \leqslant Z(\overline{x}_M) \sum_{i=1}^{p} \alpha_i$$

isto é,

$$Z(x_0) \leqslant Z(\overline{x}_M)$$

mas tínhamos

$$Z(x_0) \geqslant Z(x) \text{ para todo } x \in C.$$

Então é necessário ter $Z(x_0) = M = Z(x_M)$ e fica provoado que a solução ótima x_1 é um ponto extremo do conjunto convexo C.

b) Sejam $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_q$ os pontos extremos do conjunto convexo C, nos quais assume-se que

$$Z(\overline{x}_1) = Z(\overline{x}_2) = \cdots = Z(\overline{x}_q) = M. \qquad (3.14)$$

Considere-se agora a combinação convexa

$$x = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overline{x}_i$$

sendo

$$\alpha_i \geqslant 0 \quad (i = 1, \ldots, q) \qquad (3.15)$$

$$\sum_{i=1}^{q} \alpha_i = 1.$$

Tem-se que

$$Z(x) = Z\left(\sum_{i=1}^{q} \alpha_i \overline{x}_i\right) = Z(\alpha_1 \overline{x}_1 + \alpha_2 \overline{x}_2 + \ldots + \alpha_q \overline{x}_q) =$$

$$= \alpha_1 Z(\overline{x}_1) + \alpha_2 Z(\overline{x}_2) + \ldots + \alpha_q Z(\overline{x}_q)$$

e, pelas relações (3.14) e (3.15), obtém-se

$$Z(x) = M \sum_{i=1}^{q} \alpha_i = M.$$

Ficando assim concluída a demonstração do Teorema III.

3.5.4 CONSEQUÊNCIAS DOS TEOREMAS

a) *Teorema I.* Considere-se a solução gráfica do modelo (2.2), vista anteriormente no item 2.5, e reproduzida na Fig. 3.1, a seguir:

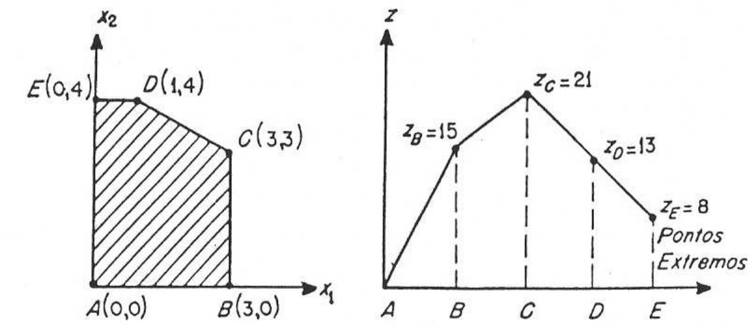

Fig. 3.1.

O valor da função objetiva no ponto C é maior que os valores da função objetivo nos pontos B, D, adjacentes a C. Pode-se então garantir que a solução ótima é o ponto C, pelo fato de o conjunto das soluções factíveis (trapézio A, B, C, D, E) ser convexo.

b) *Teorema II.* Apenas diz que uma solução factível básica do sistema (3.3) é um ponto extremo do trapézio A, B, C, D, E.

c) *Teorema III.* Garante que a solução ótima do modelo (2.2) é um ponto extremo do trapézio A, B, C, D, E. Usando o Teorema II pode-se dizer que a solução ótima do modelo (2.2) é uma solução factível básica do sistema de Equações (3.3). Desse modo o número de iterações para achar a solução ótima é finito.

3.6. O Método Simplex

3.6.1 O QUE FAZ O MÉTODO SIMPLEX

Sabe-se que a solução ótima do modelo (2.2) é uma solução factível básica do sistema de Equações (3.3), ou seja, um ponto extremo do trapézio A, B, C, D, E.

O método simplex, para ser iniciado, necessita conhecer uma solução factível básica (chamada solução inicial) do sistema (3.3) isto é, um dos pontos A, B, C, D, E do trapézio. Suponha-se que essa solução seja, por exemplo, o ponto A.

O método simplex verifica se a presente solução é ótima. Se for, o processo está encerrado. Se não for ótima, é porque um dos pontos extremos adjacentes ao ponto A fornece para a função objetiva um valor maior do que o atual. No caso, tanto B como E são melhores do que A.

O método simplex faz então a mudança do ponto A para o ponto extremo adjacente, segundo a direção que mais aumente o valor da função objetivo. No caso, a direção x_1, resultando o ponto B.

Agora, tudo que foi feito para o ponto extremo A é feito para o ponto extremo B. O processo finaliza quando estando num ponto extremo, todos os pontos extremos a ele adjacentes fornecerem valores menores para a função objetivo. É o que acontece com o ponto extremo C. É nessa hora que é importante o fato do conjunto das soluções factíveis ser convexo, como foi visto anteriormente.

Como fazer, algebricamente, essa mudança de um ponto extremo para outro, a ele adjacente?

Algebricamente, um ponto extremo adjacente é uma solução factível básica incluindo todas as variáveis básicas anteriores, com exceção de apenas uma delas. Achar, portanto, a próxima solução factível básica (ponto extremo adjacente) exige a escolha de uma variável básica para deixar a base atual, tornando-se não-básica, e a escolha de uma variável não-básica para entrar na base em sua substituição, tornando-se básica.

O método simplex compreenderá, portanto, os seguintes passos:

i) Achar uma solução factível básica inicial.
ii) Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare.
iii) Determinar a variável não-básica que deve entrar na base.
iv) Determinar a variável básica que deve sair da base.
v) Achar a nova solução factível básica, e voltar ao passo ii.

3.6.2 SOLUÇÃO ALGÉBRICA

Será agora resolvido, algebricamente, o modelo (2.2), reescrito abaixo:

Máx. $Z = 5x_1 + 2x_2$ sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad & \leqslant 3 \\ x_2 & \leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 & \leqslant 9 \\ x_1 \geqslant 0; x_2 & \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Com a introdução das variáveis de folgas x_3, x_4 e x_5 obtém-se o sistema (3.3), reescrito abaixo:

$$\begin{aligned}
\text{Máx.}\quad & Z = 5x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a} \\
& x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad = 3 \\
& \qquad x_2 \qquad + x_4 \qquad = 4 \\
& x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 = 9 \\
& x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5 \geqslant 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Note-se que os sistemas (3.16) e (3.17) encontram-se, respectivamente, nas formas canônicas e padrão. Como observado no item (3.3), o sistema (3.17) apresenta uma solução factível básica óbvia, a saber:

Variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = 0$

Variáveis básicas: $x_3 = 3$
$x_4 = 4$
$x_5 = 9$

Assim, o passo i do método simplex já foi alcançado. A solução factível básica óbvia inicial corresponde ao ponto extremo (vértice) A (0,0) do trapézio A, B, C, D, E da Fig. 2.4.

O passo ii do simplex consiste em indagar se a presente solução é ótima. O valor da função objetivo ($Z = 5x_1 + 2x_2$) é zero, pois $x_1 = x_2 = 0$. Qualquer uma dessas variáveis não-básicas que entrar na base tomará algum valor positivo, aumentando o valor da função objetivo. Conclui-se, então, que ainda não foi alcançada a solução ótima.

Como a presente solução não é ótima, é preciso saber qual a variável não-básica (x_1 ou x_2) que deve entrar na base. O método simplex determina que deve entrar na base aquela variável não-básica que tiver o maior coeficiente na função objetivo, estando a mesma expressa apenas em termos das variáveis não-básicas. Assim, deve entrar a variável x_1 que tem o coeficiente igual a 5. Este critério de entrada na base visa crescer o valor da função objetivo o mais rapidamente possível.

Para se determinar a variável que sai da base deve-se, primeiramente, colocar todas as variáveis básicas em função das não-básicas.

De (3.17) tem-se

$$\begin{aligned}
x_3 &= 3 - x_1 && (x_1 \leqslant 3) \\
x_4 &= 4 \qquad\ - x_2 && (x_1 < \infty) \\
x_5 &= 9 - x_1 - 2x_2 && (x_1 \leqslant 9)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Pode-se agora saber como a variável x_1 influencia os valores das variáveis básicas x_3, x_4 e x_5. Lembre-se que x_2 continuará fora da base, com o valor nulo. De (3.18) conclui-se que quando x_1 entrar na base, tomando algum valor positivo, as variáveis x_3 e x_5 diminuirão de valor e a variável x_4 ficará inalterada. Deseja-se aumentar o mais possível o valor de x_1, ao mesmo tempo que nenhuma variável do sistema pode tomar valor negativo. Tem-se então de tirar da base aquela variável básica que se anular mais rapidamente quando se aumentar o valor de x_1. Deve, portanto, sair da base a variável x_3.

Se a primeira equação de (3.18) fosse $x_3 = 3 + x_1$, a variável x_3 aumentaria de valor com o crescimento de x_1 e não deveria sair da base. Ressalta-se então que, ao escolher a variável que sai da base, só é necessário considerar aquelas variáveis básicas que diminuem de valor com o crescimento da variável que vai entrar na base para substituí-la.

A nova base está então formada pelas variáveis x_1, x_4 e x_5. É necessário agora transformar o sistema (3.17) para uma outra forma canônica, de tal modo que a nova base seja formada por essas variáveis. Para isso ser alcançado basta multiplicar a primeira equação de (3.17) por (−) 1 e somá-la à terceira equação, obtendo:

$$\begin{aligned}
& x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad = 3 \\
& \qquad x_2 \qquad + x_4 \qquad = 4 \\
& \qquad 2x_2 - x_3 \qquad + x_5 = 6.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

A solução factível básica óbvia de (3.19) é a seguinte:

variáveis não-básicas: $x_2 = x_3 = 0$

variáveis básicas: $x_1 = 3$ com $Z = 15$
$x_4 = 4$
$x_5 = 6.$

Esta solução corresponde ao ponto extremo B (3,0), adjacente a A (0,0), do conjunto de soluções compatíveis do trapézio A, B, C, D, E da Fig. 2.4. Notar que a variável x_5, pertencente à base nessas duas soluções factíveis básicas, diminuiu de valor ao passar do ponto A para o ponto B.

É necessário agora testar se a presente solução é ótima. Isso não pode ser feito com a função objetivo $Z = 5x_1 + 2x_2$ por duas razões:

a) Porque não se pode avaliar a influência das variáveis não-básicas x_2 e x_3 no comportamento da função objetivo, já que x_1 assumiu o valor 3 e a função objetivo original não reflete esse fato.

b) Porque não se pode afirmar que a função objetivo aumentará de valor com a entrada de x_2 na base, como notado inicialmente, pois a variável básica x_1 poderá diminuir de valor, mesmo permanecendo na base (tal como aconteceu com a variável x_5).

Deve-se então, obrigatoriamente, obter a função objetivo somente em termos das variáveis não-básicas. Sabe-se pelas relações (3.19) que $x_1 = 3 - x_3$, então

$$Z = 5x_1 + 2x_2 = 5(3 - x_3) + 2x_2 = 15 + 2x_2 - 5x_3. \qquad (3.20)$$

Agora pode-se afirmar que a presente solução ainda não é ótima, pois se x_2 entrar na base aumentará o valor da função objetivo. A variável x_3 não deve entrar na base pois, se tal ocorrer, o valor de Z será decrementado.

Visto que x_2 é a variável a entrar na base, deve-se colocar as variáveis básicas em função das não-básicas. De (3.19) obtém-se

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - x_3 && (x_2 < \infty) \\ x_4 &= 4 - x_2 && (x_2 \leqslant 4) \\ x_5 &= 6 - 2x_2 + x_3 && (x_2 \leqslant 3). \end{aligned} \qquad (3.21)$$

A variável x_5, sendo a que se anula mais rapidamente com o crescimento de x_2, é a que deve sair da base. Como x_2 deverá tomar o maior valor possível, pode-se adiantar que na próxima solução compatível básica ter-se-á $x_2 = 3$.

Deve-se agora transformar o sistema (3.19) para uma nova forma canônica, de tal modo que a nova base seja formada pelas variáveis x_1, x_2 e x_4. Para isso é necessário: *a*) dividir a terceira equação de (3.19) por 2; *b*) multiplicar a terceira equação de (3.19) por (−) 1/2 e somá-la à segunda equação, obtendo

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \quad x_3 \qquad\qquad\qquad &= 3 \\ \frac{1}{2}x_3 + x_4 - \frac{1}{2}x_5 &= 1 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 \qquad + \frac{1}{2}x_5 &= 3. \end{aligned} \qquad (3.22)$$

De (3.22) tira-se a seguinte solução factível básica:

variáveis não-básicas: $x_3^* = x_5^* = 0$

variáveis básicas: $x_1^* = 3$ com $Z = 21$

$x_2^* = 3$

$x_4^* = 1$.

Esta solução corresponde ao ponto extremo C (3,3), adjacente a B (3,0), do conjunto de soluções factíveis do trapézio A, B, C, D, E da Fig. 2.4.

Deve-se colocar a função objetivo somente em termos das variáveis não-básicas. De (3.22) obtém-se

$$x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5$$

que colocada em (3.20) fornece:

$$Z = 15 + 2\left(3 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_5\right) - 5x_3 = 21 - 4x_3 - x_5. \qquad (3.23)$$

O valor da função objetivo no ponto C (3,2) pode ser calculado de duas maneiras: *a*) $Z^* = 5x_1^* + 2x_2^* = 21$ ou *b*) $Z^* = 21 - 4x_3^* - x_5^* = 21$.

Baseado em (3.23) pode-se afirmar que se está diante da solução ótima, pois tanto x_3 como x_5 se entrarem na base diminuirão o valor da função objetivo.

Para diferenciar a solução ótima das demais, convenciona-se representá-la por Z^*, x_1^*, x_2^* etc.

Com os novos conceitos que foram introduzidos pode-se reescrever os cinco passos do método simplex, para o caso de maximização, da seguinte maneira:

i) Achar uma forma canônica inicial para o sistema de equações, isto é, achar uma solução factível básica óbvia.

ii) Colocar a função objetivo, somente em termos das variáveis não-básicas. Se todos os coeficientes dessas variáveis forem negativos (ou nulos) a presente solução é ótima. Caso contrário, siga para o passo iii.

iii) Colocar na base a variável não-básica que tiver o maior coeficiente positivo na função objetivo obtida no passo ii.

iv) Tirar da base a variável básica que se anular mais rapidamente, quando a variável que entrar for aumentada de valor.

v) Achar uma outra forma canônica para o sistema de equações, levando em consideração os passos iii e iv. Voltar ao passo ii.

3.6.3 SOLUÇÃO USANDO QUADROS

A utilização de quadros para a aplicação do método simplex em modelos de programação linear, visa apenas simplificar os cálculos do item anterior.

Inicialmente, vamos escrever o sistema (3.17) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Z - 5x_1 - 2x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 3 \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 4 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 9 \end{aligned} \qquad (3.24)$$

Pode-se representar o sistema (3.24) da maneira esquemática abaixo:

Base	Z	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
	1	−5	−2	0	0	0	0	(0)
x_3	0	1	0	1	0	0	3	(1) →
x_4	0	0	1	0	1	0	4	(2)
x_5	0	1	2	0	0	1	9	(3)

(3.25)

Note-se que os coeficientes da função objetivo, linha (0) de (3.25), sofreram inversões de sinais.

Sendo nulos os coeficientes de x_3, x_4 e x_5 na linha (0) de (3.25) a função objetivo já se encontra somente em termos das variáveis não-básicas x_1 e x_2. Pode-se então afirmar que a presente solução não é ótima, e que a variável a entrar na base é x_1.

Para a determinação da variável que sai, poder-se-ia obter as relações (3.18) a partir de (3.25) e repetir o raciocínio do item anterior. Pela análise feita nas relações (3.18) pode-se concluir que nas linhas (1), (2) e (3) de (3.25) só interessam: *a*) os coeficientes do vetor independente b; *b*) os coeficientes de x_1 que forem positivos. O valor máximo que x_1 pode tomar, sem tornar negativa nenhuma outra variável, será obtido pelas relações entre os coeficientes acima mencionados, ou seja:

$$\text{linha (1):} \quad x_1 \leqslant \frac{3}{1}$$

$$\text{linha (3):} \quad x_1 \leqslant \frac{9}{1}$$

A variável x_1 tomará então o valor 3 e deverá sair da base a variável que está associada à linha (1), ou seja, x_3.

Visto que entra x_1 no lugar de x_3, o próximo quadro deverá apresentar a seguinte base:

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	0			0	0	
x_1	0	1			0	0	
x_4	0	0			1	0	
x_5	0	0			0	1	

(3.26)

Note-se que na função objetivo os coeficientes de x_1, x_4 e x_5 foram colocados iguais a zero, pois é necessário tê-la apenas em termos das variáveis não-básicas.

Precisa-se completar o quadro (3.26) a partir do quadro (3.25). Apenas as colunas de x_1 são diferentes nesses dois quadros. Tem-se que transformar a coluna de x_1 do quadro (3.25) para a desejada no quadro (3.26). É claro que, para não se alterar as equações, deve-se aplicar às outras colunas as mesmas operações efetuadas com a coluna de x_1. A linha (1) será a linha pivô das transformações por ser a linha associada à variável que sai da base. Para se terminar o quadro (3.26) são necessárias as seguintes operações no quadro (3.25):

a) repetir as linhas (1) e (2);

b) multiplicar a linha (1) por (–) 1 e somá-la à linha (3);

c) multiplicar a linha (1) por 5 e somá-la à linha (0).

Obter-se-á, então:

	Z	x_1	↓ x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	0	–2	5	0	0	15	
x_1	0	1	0	1	0	0	3	
x_4	0	0	1	0	1	0	4	
x_5	0	0	2	–1	0	1	6	→

(3.27)

Da linha (0) de (3.27) tira-se $Z = 15 + 2x_2 - 5x_3$ que coincide com a relação (3.20) obtida anteriormente.

Pelo coeficiente (–) 2 na linha (0) de (3.27) pode-se afirmar que a solução ainda não é ótima. A variável que deve entrar na base é x_2.

Do quadro (3.27) obtém-se:

$$\text{linha (2): } x_2 \leqslant \frac{4}{1}$$

$$\text{linha (3): } x_2 \leqslant \frac{6}{2}.$$

Deve sair da base a variável associada com a linha (3), ou seja, x_5. As seguintes operações devem ser realizadas no quadro (3.27):

a) dividir a linha (3) por 2;

b) multiplicar a linha (3) por (–) 1/2 e somá-la à linha (2);

c) repetir a linha (1);

d) somar a linha (3) à linha (0).

Obter-se-á, então:

	Z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	0	4	0	1	21
x_1^*	0	1	0	1	0	0	3
x_4^*	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_2^*	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3

(3.28)

A presente solução é a ótima, pois não existe nenhum coeficiente negativo na linha (0) do quadro (3.28). A função objetivo será $Z = 21 - 4x_3 - x_5$ que coincide com a relação (3.23) obtida anteriormente.

Os quadros (3.25), (3.27) e (3.28) correspondem exatamente aos sistemas (3.17), (3.19) e (3.22), respectivamente.

3.6.4. RESUMO DO MÉTODO SIMPLEX USANDO QUADROS

Seja o problema de programação linear reproduzido abaixo, já na forma canônica, e equivalente aos sistemas (3.1) e (3.2), com as últimas m variáveis representando variáveis de folga e o lado direito não negativo. O uso do índice s, $s = n - m$, tem por fim aliviar a notação.

$$\text{Máx.} \quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_sx_s + 0 \cdot x_{s+1} + 0 \cdot x_{s+2} + \\ + \ldots + 0 \cdot x_n$$

sujeito a:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + x_{s+1} + 0 + \ldots + 0 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2s}x_s + 0 + x_{s+2} + \ldots + 0 = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + 0 + 0 + \ldots + x_n = b_m$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

Nas condições acima já se pode dar início ao simplex e (3.29) organizar os dados segundo um quadro no qual a linha (0) é:

$$\bar{c}_j = -c_j \text{ para } j = 1, \ldots, s$$

$$\bar{c}_{s+i} = 0 \text{ para } i = 1, \ldots, m$$

	Z	x_1	...	x_k	...	x_s	x_{s+1}	...	x_{s+r}	...	x_n	
BASE	1	$\bar{c}_1$	...	$\bar{c}_k$	...	$\bar{c}_s$	$\bar{c}_{s+1}$	...	$\bar{c}_{s+r}$	...	$\bar{c}_n$	0
x_{s+1}	0	a_{11}	...	a_{1k}	...	a_{1s}	1	...	0	...	0	b_1
⋮	⋮	⋮					⋮		⋮		⋮	⋮
x_{s+r}	0	a_{r1}	...	a_{rk}	...	a_{rs}	0	...	1	...	0	b_r
⋮	⋮	⋮					⋮		⋮		⋮	⋮
x_n	0	a_{m1}	...	a_{mk}	...	a_{ms}	0	...	0	..	1	b_m

(3.29)

O quadro (3.29) oferece a solução básica inicial:

$$x_j = 0 \; (j = 1, \ldots, s) \text{ – variáveis não-básicas}$$

$$x_{s+i} = b_i \; (i = 1, \ldots, m) \text{ – variáveis básicas}$$

Pode-se resumir o método simplex nos seguintes passos:

i) Começar com o quadro na forma canônica (3.29).

ii) Realizar o teste de otimização.

Se todos os $\bar{c}_j \geqslant 0$ ($j = 1, 2, \ldots, n$), a solução obtida é ótima. Pare.
Se houver algum $c_j < 0$, escolher dentre eles a menor, ou seja:

$$\bar{c}_k = \min_j \left\{ \bar{c}_j, \bar{c}_j < 0 \right\}$$

e vá para o passo (iii), para fazer o vetor x_k entrar na base. Se o mínimo $\bar{c}_k$ ocorrer para mais de um k, escolher arbitrariamente um deles.

iii) Entrar com a variável ~~o vetor~~ x_k na base. Para definir o vetor a sair da base surgem duas possibilidades:

a) $a_{ik} \leqslant 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. Então x_k pode ser aumentado indefinidamente, sem fazer nenhuma variável básica decrescer a zero e o valor de Z tende a infinito. Pare, a solução é ilimitada.

b) $a_{ik} > 0$ para algum i. Neste caso calcule o menor dos coeficientes b_i/a_{ik}. Seja r a variável básica tal que:

$$\frac{b_r}{a_{rk}} = \min_i \left\{ \frac{b_i}{a_{ik}}, \; a_{ik} > 0 \right\}$$

Esta relação define que a variável a sair da base é a variável básica correspondente à r-ésima equação (variável x_{s+r} na primeira iteração), enquanto que a_{rk} é denominado de elemento pivô. Vá para o passo (iv)

iv) Substituir na base a variável correspondente à r-ésima equação pela variável x_k que passará a ser básica. Isto exige que a linha r seja dividida por a_{rk}, inclusive o elemento b_r. Para zerar os demais elementos da coluna k, há que adicionar múltiplos apropriados da linha r. Igualmente, o elemento $\bar{c}_k$ deve ser zerado pela adição de múltiplo da linha r. Como conseqüência dessas operações, todos os elementos do quadro sofrem alterações que, para cálculos automáticos em computador, podem ser reduzidos às seguintes regras:

$$\text{linha } r: \quad a_{rj} \Rightarrow \frac{a_{rj}}{a_{rk}} \qquad j = 1, 2, \ldots, n, n+1$$

$$\text{elemento } i, j: \quad a_{ij} \Rightarrow a_{ij} - \frac{a_{ik}}{a_{rk}} a_{rj} \qquad \left\{ \begin{array}{l} i = 0, 1, \ldots, m \\ i \neq r \\ j = 1, 2, \ldots, n, n+1 \end{array} \right.$$

onde a_{0j} $= c_j$ corresponde aos elementos da linha (0);

$a_{i,\,n+1}$ $= b_i$ corresponde aos elementos da coluna b_i e

$a_{0,\,n+1} = 0$, no quadro inicial, registra os valores da função objetivo z.

Vá para o passo (ii) para realizar o teste de otimização:

3.7. Casos Especiais

Serão estudados a seguir alguns casos que podem ocorrer nos modelos de programação linear e que não foram considerados no item 3.3.

3.7.1. PROBLEMAS DE MINIMIZAÇÃO

Resolveu-se, até agora, modelos com funções objetivo a serem maximizadas. Quando a função objetivo tiver de ser minimizada pode-se fazer duas coisas, a saber:

a) Inverter o teste de otimização e o critério de entrada na base. Assim, o passo ii seria: se todos os coeficientes da linha (0) forem negativos, ou nulos, a presente solução é ótima. Caso contrário, escolha o vetor x_k para entrar na base tal que $\overline{c}_k = \max_j \overline{c}_j$ e siga para o passo iii;

b) Transformar o problema de minimização num problema de maximização. Sabe-se que achar o mínimo de uma função é equivalente a achar o máximo do simétrico dessa função. Por exemplo:

$$\text{MIN} \quad W = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3$$

equivale a: $\text{MÁX} \quad Z = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3$ e depois, na solução final, fazer $W = -Z$.

3.7.2. EMPATE NA ENTRADA

Quando houver empate na escolha da variável que entra na base, deve-se tomar a decisão arbitrariamente. A única implicação envolvida é que se pode escolher um caminho mais longo ou mais curto para se chegar à solução ótima.

3.7.3 EMPATE NA SAÍDA – DEGENERAÇÃO

Como no caso anterior, a decisão deve também ser arbitrária. Considere-se um exemplo para se analisar as implicações desse empate. Seja o modelo:

$$\begin{aligned} \text{Máx.} \quad Z = 5x_1 + 2x_2 \quad & \text{sujeito a} \\ x_1 \quad & \leqslant 3 \\ x_2 & \leqslant 4 \\ 4x_1 + 3x_2 & \leqslant 12 \\ x_1, \quad x_2 & \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Colocadas as variáveis de folgas do modelo (3.30) obtém-se

	Z	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	−5	−2	0	0	0	0	
x_3	0	1	0	1	0	0	3	→
x_4	0	0	1	0	1	0	4	
x_5	0	4	3	0	0	1	12	

(3.31)

Para escolher a variável que sai da base de (3.31) deve-se fazer:

$$\text{linha (1):} \quad x_1 \leqslant \frac{3}{1}$$

$$\text{linha (3):} \quad x_1 \leqslant \frac{12}{4},$$

Nos dois casos tem-se $x_1 \leqslant 3$. Escolha-se, arbitrariamente, x_3 para sair da base. O novo quadro será:

	Z	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	b	
Base	1	0	−2	5	0	0	15	
x_1	0	1	0	1	0	0	3	
x_4	0	0	1	0	1	0	4	
x_5	0	0	3	−4	0	1	0	→

(3.32)

Note-se que a variável básica x_5 de (3.32) é nula. Isso sempre ocorrerá quando houver um empate na saída. Aconteceu, nesse caso, que as variáveis x_3 e x_5 se anularam ao mesmo tempo para o valor de $x_1 = 3$. Assim, a variável que ficar na base terá valor nulo. Quando isso ocorrer diz-se que a solução factível básica é degenerada.

O próximo quadro, (3.33), indica a solução ótima:

	Z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	0	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	15
x_1^*	0	1	0	1	0	0	3
x_4^*	0	0	0	$\frac{4}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	4
x_2^*	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0

(3.33)

Se na ocasião do empate fosse escolhido x_5, em vez de x_3, para sair da base, do quadro (3.31) se iria, diretamente, ao quadro (3.34) abaixo:

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	$\frac{7}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	15
x_3^*	0	0	$-\frac{3}{4}$	1	0	$-\frac{1}{4}$	0
x_4^*	0	0	1	0	1	0	4
x_1^*	0	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	3

(3.34)

Deve-se ressaltar que no segundo caso conseguiu-se chegar à solução também ótima (3.34) com uma iteração a menos.

Ao se comparar os quadros (3.32) e (3.33) verifica-se que os valores das variáveis e da função objetivo são os mesmos nos dois casos. Entretanto, a solução (3.33) é ótima e a (3.32) não. Um dos problemas da degeneração é o de, eventualmente, se entrar em circuitos fechados intermináveis à procura da solução ótima. Felizmente, entretanto, tal fenômeno jamais foi observado em problemas reais. O leitor interessado no tema deve examinar o método de Bland ou, ainda, o método lexicográfico, projetados para evitar a ciclagem, e apresentados nas referências ao fim do capítulo.

3.7.4. SOLUÇÕES MÚLTIPLAS

Eventualmente, um modelo de programação linear pode apresentar mais de uma solução ótima. Quando isso ocorrer, o método simplex é capaz de acusá-lo. Considere-se, por exemplo, o modelo a seguir, já apresentado no item 2.5.1.

$$\text{Máx.} \quad Z = x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a}$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad &\leqslant 3 \\ x_2 &\leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 9 \\ x_1 \; , \quad x_2 &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad (3.35)$$

Introduzindo-se as variáveis de folga x_3, x_4 e x_5, e aplicando-se o método simplex, encontra-se, após duas iterações o quadro (3.36); que dá a solução ótima.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4 ↓	x_5	b	
Base	1	0	0	0	$\boxed{0}$	1	9	
x_3^*	0	0	0	1	2	-1	2	→
x_2^*	0	0	1	0	1	0	4	
x_1^*	0	1	0	0	-2	1	1	(3.36)

Note-se que na solução ótima (3.36), correspondente ao ponto extremo D (1, 4) na Fig. 2.5, o coeficiente da variável não-básica x_4 na função objetivo é nulo. A função objetivo é $Z = 9 - 0x_4 - x_5$. A variável x_4 pode entrar na base, e qualquer que seja o valor que ela assuma, a função objetivo ficará com seu valor inalterado.

	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
Base	1	0	0	$\boxed{0}$	0	1	9
x_4^*	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_2^*	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_1^*	0	1	0	1	0	0	3

(3.37)

Na solução (3.37), correspondente ao vértice C (3, 3) do trapézio A, B, C, D, E da Fig. 2.5, o coeficiente de x_3 na função objetivo é nulo. Se em (3.37) x_3 entrar na base, retorna-se ao quadro (3.36), ou seja, ao ponto D.

Pela parte (b) do Teorema III pode-se afirmar que qualquer combinação convexa de (3.36) e (3.37), isto é, qualquer ponto de CD, também será uma solução ótima para o modelo em questão.

3.7.5. SOLUÇÕES INFINITAS

Seja o modelo abaixo, já discutido no item 2.5.2., quando foi constatada sua divergência.

$$\begin{aligned} \text{MÁX } Z &= 5x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a} \\ x_2 &\leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 9 \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Introduzindo-se as variáveis x_3 de folga na primeira restrição e x_4 de excesso na segunda, pode-se iniciar o método simplex. Entretanto, ao se eliminar o coeficiente (−) 5 da variável básica x_1 na linha (0), resulta o quadro abaixo:

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	
	1	0	8	0	−5	45
x_3	0	0	1	1	0	4
x_1	0	1	2	0	−1	9

É instrutivo comparar a solução corrente, oferecida pelo quadro, com o sistema original de restrições. De acordo com a solução, a primeira restrição é satisfeita com $x_3 = 4$ e a segunda restrição é satisfeita com $x_1 = 9$.

Note-se ainda que a linha (0) indica que a atual solução não é ótima, pois a variável x_4 tem coeficiente (−) 5 e ela deve ser introduzida na base. Entretanto, o teste do quociente, para determinar a variável a sair da base, não aponta nenhuma variável, pois a coluna de x_4 tem os coeficientes 0 e (−) 1. Em outras palavras, se x_4 aumentar, a variável x_3 permanece inalterada, enquanto x_1 aumenta indefinidamente.

A conclusão é que o método simplex indica um problema ilimitado toda vez que uma variável fora da base, com coeficiente negativo na linha (0), em problemas de maximização, não tiver coeficientes positivos nas demais linhas.

3.8. Obtenção da Solução Inicial

O passo inicial do simplex consiste em identificar uma solução factível básica. Nos exemplos já apresentados o sistema era do tipo canônico, ou seja, com uma solução factível básica óbvia.

Quando o sistema se apresenta sob a forma padrão $Ax = b$, é possível, através de operações elementares, transformar o sistema para a forma canônica, desde que o sistema o permita.

Será visto neste item, entretanto, um método muito eficiente, que consiste na inclusão, no sistema, de variáveis básicas denominadas artificiais, que garantem a criação de uma solução factível básica inicial, caso ela exista.

3.8.1. CASOS DE DIFICULDADES

Suponha-se que todos os b_i sejam $\geqslant 0$. Se algum deles for negativo, pode-se multiplicar toda a restrição correspondente por (− 1) para transformá-lo em positivo.

Supondo todos os $b_i \geqslant 0$, haverá dificuldade desde que o modelo apresente uma restrição do tipo $\geqslant$.

Para exemplificar, considere-se o modelo (2.2) com apenas a sua restrição (c) modificada para $\geqslant$, ou seja:

$$\begin{aligned} \text{Máx.} \quad Z &= 5x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a} \\ x_1 &\leqslant 3 \\ x_2 &\leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 9 \\ x_1\ ,\quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Pela solução gráfica análoga à Fig. 2.4 constata-se que a região variável é constituída pelo triângulo *CFD* e conclui-se que a solução ótima é o ponto F (3,4).

Colocando as variáveis de folga ou de excesso obtém-se

$$\begin{aligned} Z - 5x_1 - 2x_2 \qquad\qquad &= 0 \\ x_1 \qquad + x_3 \qquad\qquad &= 3\ (a) \\ x_2 \qquad + x_4 \qquad &= 4\ (b) \\ x_1 + 2x_2 \qquad\qquad - x_5 &= 9\ (c) \\ x_1, x_2, \ldots, x_5 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

O sistema (3.39) apesar de estar na forma padrão, não está na forma canônica. A solução básica formada por:

variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = 0$

variáveis básicas: $x_3 = 3$

$x_4 = 4$

$x_5 = -9$

não é factível pois x_5 é negativa.

Para se obter uma forma canônica para o sistema (3.39) pode-se acrescentar uma variável artificial x_6 na sua equação (c). Essa variável x_6 tomará o lugar de x_5 na base inicial. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad\quad &= 3 \;(a) \\ x_2 \quad + x_4 \quad &= 4 \;(b) \\ x_1 + 2x_2 \quad - x_5 + x_6 &= 9 \;(c) \end{aligned} \qquad (3.40)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geqslant 0$$

e a solução factível básica inicial será:

variáveis não-básicas: $x_1 = x_2 = x_5 = 0$

variáveis básicas: $x_3 = 3$

$x_4 = 4$

$x_6 = 9$.

Os sistemas (3.39) e (3.40) só serão equivalentes se a variável artificial x_6 for nula. Ao se conseguir obter uma base em (3.40) que não inclua x_6, esta condição será satisfeita. Dois processos para alcançar esse objetivo são explicados a seguir.

3.8.2 PROCESSO DO "M GRANDE"

Para se forçar x_6 a não pertencer à base ótima em (3.40) pode-se transformar a função objetiva para:

$$Z = 5x_1 + 2x_2 - Mx_6$$

onde M é um número tão grande quanto necessário. Assim, o valor máximo de Z só será alcançado se $x_6 = 0$, conforme desejado.

Fica ao leitor o encargo de achar a solução ótima do modelo (3.38) com a utilização do processo do "M grande", e compará-la com a obtida no próximo item pelo segundo processo.

3.8.3. PROCESSO DA FUNÇÃO OBJETIVO ARTIFICIAL

Este processo é também denominado de duas fases. A Fase I consiste em abandonar a função objetivo de (3.38), colocando no sistema (3.40) uma função objetivo artificial, formada pela variável artificial x_6, conforme indicado abaixo:

Mín. $W = x_6$ sujeito a

$$\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad\quad &= 3 \\ x_2 \quad + x_4 \quad &= 4 \\ x_1 + 2x_2 \quad - x_5 + x_6 &= 9 \end{aligned} \qquad (3.41)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_6 \geqslant 0.$$

Como x_6 não pode ser negativo, o seu valor mínimo será igual a zero. Assim, ao se achar o mínimo de W igual a zero, ter-se-á excluído da base a variável artificial x_6. (Antes de se passar à Fase II do processo.)

Se um modelo requerer ~~mais de uma~~ variável artificial para completar a base inicial, a função objetiva W será igual à soma dessas variáveis artificiais. Para o mínimo de W ser zero, todas as variáveis artificiais terão de ser nulas. Se o mínimo de W for diferente de zero é porque o sistema de equações original não tem solução factível.

Para minimizar $W = x_6$ deve-se maximizar $(-W) = -x_6$, ou seja, considerar $(-W) + x_6 = 0$ e obter o quadro seguinte:

Base	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	0	0	0	1	0
x_3	0	1	0	1	0	0	0	3
x_4	0	0	1	0	1	0	0	4
x_6	0	1	2	0	0	−1	1	9

Para colocar a função objetivo W em função das variáveis não-básicas, há que eliminar da função objetivo a variável básica x_6. Isto pode ser conseguido adicionando-se à linha 0 a última multiplicada por (-1).

Base	$-W$	x_1	x_2 ↓	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	1	−1	−2	0	0	1	0	−9	
x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	
x_4	0	0	1	0	1	0	0	4	→
x_6	0	1	2	0	0	−1	1	9	

Os próximos quadros serão:

Base	$-W$	$\downarrow$ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	
	1	-1	0	0	2	1	0	-1	
x_3	0	1	0	1	0	0	0	3	
x_2	0	0	1	0	1	0	0	4	
x_6	0	1	0	0	-2	-1	1	1	$\rightarrow$

Base	$-W^*$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
	1	0	0	0	$\boxed{0}$	$\boxed{0}$	1	0
x_3^*	0	0	0	1	2	1	-1	2
x_2^*	0	0	1	0	1	0	0	4
x_1^*	0	1	0	0	-2	-1	1	1

(3.42)

Note-se no quadro (3.42) que o valor mínimo de W é igual a zero. Desprezando a variável artificial x_6, o quadro (3.42) fornece a seguinte solução factível básica para o sistema (3.39):

variáveis não-básicas: $x_4 = x_5 = 0$

variáveis básicas: $x_1 = 1$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 2.$$

Esta solução factível básica corresponde ao ponto extremo D (1,4) do triângulo CDF da Fig. 2.4.

Os coeficientes nulos de x_4 e x_5 na função objetivo de (3.42) indicam que existem mais duas soluções factíveis básicas para o sistema (3.39), correspondentes aos pontos extremos C (3,3) e F (3,4) do triângulo CDF da Fig. 2.4.

Obtida uma solução factível básica para o sistema (3.39), passa-se à Fase II do processo.

A Fase II consiste em aplicar ao quadro final (3.42) os seguintes passos:

a) Eliminar a função W e a variável artificial x_6;

b) Introduzir Z e a função objetivo original;

c) Eliminar da função objetivo as variáveis básicas.

As aplicações dos passos (*a*) e (*b*) mostra a solução canônica inicial para prosseguimento do método simplex, conforme o quadro (3.43):

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	-5	-2	0	0	0	0
x_3	0	0	0	1	2	1	2
x_2	0	0	1	0	1	0	4
x_1	0	1	0	0	-2	-1	1

(3.43)

O passo (*c*) é obtido eliminando-se as variáveis básicas x_1 e x_2 da função objetivo. Isto é conseguido no quadro (3.43) adicionando-se à linha (0) duas vezes a linha (2) e cinco vezes a linha (4). Tem-se então:

Base	Z	x_1	x_2	x_3	$\downarrow$ x_4	x_5	b	
	1	0	0	0	-8	-5	13	
x_3	0	0	0	1	2	1	2	$\rightarrow$
x_2	0	0	1	0	1	0	4	
x_1	0	1	0	0	-2	-1	1	

Base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	$\downarrow$ x_5	b
	1	0	0	4	0	-1	21
x_4	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1
x_2	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	3
x_1	0	1	0	1	0	0	3

Base	Z^*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	5	2	0	23
x_5^*	0	0	0	1	2	1	2
x_2^*	0	0	1	0	1	0	4
x_1^*	0	1	0	1	0	0	3

Chegou-se assim à solução ótima, que corresponde ao ponto extremo $F(3,4)$ do triângulo *CDF* da Fig. 2.4.

3.8.4. PROBLEMA RESOLVIDO

Achar, pelo processo da função objetivo artificial, todas as soluções factíveis básicas do seguinte sistema de equações:

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 6$$

$$4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = 9$$

$$x_1 \geqslant 0;\ x_2 \geqslant 0;\ x_3 \geqslant 0.$$

Como não há nenhuma função objetivo, este problema termina ao fim da Fase I. Colocando as variáveis artificiais x_4 e x_5 vem:

Mín. $W = x_4 + x_5$ sujeito a

$$3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \qquad = 6$$

$$4x_1 + 7x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 = 9$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geqslant 0.$$

Transformando a função W para maximização ter-se-á Máx. $(-W) = -x_4 - x_5$ e, finalmente,

Base	$-W$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	0	0	1	1	0
x_4	0	3	2	-5	1	0	6
x_5	0	4	7	4	0	1	9

Eliminando da função objetivo as variáveis básicas x_4 e x_5 obtém-se:

Base	$-W$	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	x_4	x_5	b
	1	-7	-9	1	0	0	-15
x_4	0	3	2	-5	1	0	6
x_5	0	4	7	4	0	1	9 →

$\frac{6}{2} > \frac{9}{7}$

Base	$-W$	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	$-13/7$	0	43/7	0	9/7	$-24/7$
x_4	0	13/7	0	$-43/7$	1	$-2/7$	24/7 →
x_2	0	4/7	1	4/7	0	1/7	9/7

$\frac{9}{4} > \frac{24}{13}$

Base	$-W^*$	x_1	x_2	$\downarrow x_3$	x_4	x_5	b
	1	0	0	$\boxed{0}$	1	1	0
x_1^*	0	1	0	$-43/13$			24/13
x_2^*	0	0	1	32/13			3/13

(3.44)

O mínimo de W no quadro (3.44) é zero, indicando que se obteve uma solução factível básica para o sistema. Existe uma outra solução pois é nulo o coeficiente de x_3 na função objetivo. Ela está indicada abaixo:

Base	$-W^*$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b
	1	0	$\boxed{0}$	0	1	1	0
x_1^*	0	1	43/32	0			897/416
x_3^*	0	0	13/32	1			3/32

3.9. Exemplo Completo do Método Simplex

Este exemplo visa mostrar ao leitor como se pode acoplar o problema de achar uma solução inicial, pelo processo da função objetivo artificial, com a procura da solução propriamente dita.

Para isso ser alcançado deve-se trabalhar, ao mesmo tempo, com as duas funções objetivo Z e W. Inicialmente é a função W que comanda a entrada das variáveis na base. Em cada quadro elimina-se da função Z as variáveis básicas correspondentes. Quando o valor de W chegar a zero pode-se abandoná-la, bem como as variáveis artificiais. Daí por diante segue-se apenas com a função Z e com apenas as variáveis originais do problema.

Considere-se, por exemplo, o seguinte modelo:

$$\text{Mín.}\quad Z = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 5 \\ 2x_1 + x_2 &\geqslant 7 \\ x_1,\quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Colocando as variáveis de excesso obtém-se:

$$\text{Mín:}\quad Z = 3x_1 + 2x_2 \quad \text{sujeito a}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 \qquad &= 5 \\ 2x_1 + x_2 \qquad - x_4 &= 7 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{3.45}$$

Para se achar uma solução inicial pode-se colocar as variaveis artificiais x_5 e x_6, acompanhadas da função objetivo artificial W. Obtém-se, então,

$$\begin{aligned} W \qquad\qquad\qquad\qquad - x_5 - x_6 &= 0 \\ Z - 3x_1 - 2x_2 \qquad\qquad\qquad &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 5 \\ 2x_1 + x_2 \qquad - x_4 \qquad + x_6 &= 7 \\ x_1, x_2, \ldots, x_6 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Transformando as funções Z e W para maximização, chegar-se-á ao quadro inicial abaixo:

Base	$-W$	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	0	0	0	1	1	0
	0	1	3	2	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	1	−1	0	1	0	5
x_6	0	0	2	1	0	−1	0	1	7

Eliminando as variáveis básicas x_5 e x_6 da função W vem:

Base	$-W$	$-Z$	x_1 ↓	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	−3	−2	1	1	0	0	−12
	0	1	3	2	0	0	0	0	0
x_5	0	0	1	1	−1	0	1	0	5
x_6	0	0	2	1	0	−1	0	1	7 →

Base						↓			
	1	0	0	−1/2	1	−1/2	0	3/2	−3/2
	0	1	0	1/2	0	3/2	0	−3/2	−21/2
x_5	0	0	0	1/2	−1	1/2	1	−1/2	3/2 →
x_1	0	0	1	1/2	0	−1/2	0	1/2	7/2

Base	$-W$	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
	1	0	0	0	0	0	1	1	0
	0	1	0	−1	3	0	−3	0	−15
x_4	0	0	0	1	−2	1	2	−1	3
x_1	0	0	1	1	−1	0	1	0	5

(3.46)

A função artificial W chegou ao seu valor mínimo, que sendo nulo, indica a existência de solução compatível para o problema, indicando o início da Fase II. No quadro (3.46) pode-se abandonar a linha da função W e as duas variáveis artificiais, obtendo-se:

Base	$-W$	$-Z$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
				↓					
		1	0	-1	3	0			-15
x_4		0	0	1	-2	1			3
x_1		0	1	1	-1	0			5

$\longrightarrow$ (3.47)

O quadro (3.47) mostra uma solução compatível básica para o sistema (3.45). A função Z já está somente em termos das variáveis não-básicas. Então, pode-se imediatamente obter o quadro seguinte:

Base	$-W$	$-Z^*$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b
		1	0	0	1	1			-12
x_2^*		0	0	1	-2	1			3
x_1^*		0	1	0	1	-1			2

(3.48)

que é a solução ótima.

Observar que é possível passar diretamente do quadro (3.46) para o quadro (3.48). O quadro (3.47) foi escrito apenas para facilidade de explanação.

3.10. Conclusões e Referências

Neste capítulo foram apresentados: o método simplex, que é a ferramenta básica da programação linear; os três teoremas em que o método se apoia; exemplos que sistematizam a pesquisa dos vértices da região factível e o uso das variáveis artificiais para obter a solução básica inicial.

Os Caps. ~~3~~ 5 e 4 exploram casos particulares da programação linear, enquanto que os Caps. 6 e 7 ampliam o alcance do método simplex, discutindo dualidade e a pós-otimização.

Tópicos adicionais não analisados neste livro são, entre outros, o simplex revisado, utilizado nos pacotes comerciais; métodos que evitam a ciclagem; e a decomposição, para problemas de grande porte. Para o aprofundamento desses, e outros temas, as seguintes referências são recomendadas:

Bregalda, Paulo F., Antônio A.F. de Oliveira e Cláudio T. Bornstein. *Introdução à Programação Linear*. Editora Campus Ltda., Rio de Janeiro, 1981.

Chvatal, Vasek. *Linear Programming*, W. H. Freeman, New York, 1983.

Hadley, G., *Linear Programming*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962.

3.11. PROBLEMAS PROPOSTOS

√ 3.1. Dado o problema de programação linear:

Máx. $Z = 2x_1 + 3x_2$ sujeito a

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1 + 3x_2 \leq 9$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

a) Achar a solução gráfica;

b) Resolver pelo método simplex e, a cada iteração, identificar o vértice correspondente no plano (x_1, x_2).

3.2. Dado o problema de programação linear:

Máx. $Z = 7x_1 + 9x_2$ sujeito a

$$x_1 - x_2 \geq -2$$
$$3x_1 + 5x_2 \leq 15$$
$$5x_1 + 4x_2 \leq 20$$
$$x_1,\ x_2 \geq 0$$

a) Achar a solução gráfica;

b) Resolver pelo método simplex e, a cada iteração, identificar o vértice correspondente no plano (x_1, x_2).

3.3. Transformar o sistema, a seguir, para a forma padrão:

Mín. $Z = 3x_1 - 2x_2 - x_3$ sujeito a

$$x_1 + x_2 + x_3 < 8$$
$$2x_1 - x_2 - x_3 > 10$$
$$4x_1 + 2x_2 - x_3 = -7$$
$$x_1 > 0;\ x_2 < 0;\ x_3 \text{ sem restrição de sinal}$$

3.4. Dado o seguinte problema de programação linear:

Máx. $Z = 3x_1 + x_2 + 5x_3$ sujeito a

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5 = 15$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 > 0$$

a) Qual a solução básica inicial óbvia e qual o valor de Z?

b) Supor que a variável x_3 passe de 0 a 1, mantidos $x_1 = x_2 = 0$. Qual o valor resultante de x_4, x_5 e de Z?

c) Qual o valor máximo que x_3 pode alcançar e qual a nova solução factível básica quando x_3 alcançar seu valor máximo?

3.5. Resolver o seguinte problema de programação linear:

Máx. $Z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ sujeito a

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 < 10$$
$$5x_1 + 6x_2 + 2x_3 < 12$$

e $x_1 > 0;\ x_2 > 0;\ x_3 > 0.$

3.6. Resolver o seguinte problema de programação linear:

Mín. $Z = x_4 + x_5 + x_6$ sujeito a

$$-x_1 - 2x_3 + x_4 = 5$$
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_5 = 3$$
$$2x_1 - 5x_2 + 6x_3 + x_6 = 5$$
$$x_j > 0\ (j = 1, 2, \ldots, 6).$$

3.7. Resolver o seguinte problema de programação linear:

Máx. $Z = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3$ sujeito a

$$x_1 + x_2 + 2x_3 < 4$$
$$4x_1 - 5x_2 - 3x_3 < 30$$

e $x_1 > 0;\ x_3 > 0.$

x_2 sem restrição de sinal.

3.8. Resolver o seguinte problema de programação linear:

Mín. $Z = -x_1 - 2x_2 + x_3$ sujeito a

$$-2x_1 - x_2 + x_3 > -2$$
$$2x_1 - x_2 + 5x_3 < 6$$
$$-4x_1 - x_2 - x_3 > -6$$

e $x_1 > 0;\ x_3 > 0$

x_2 sem restrição de sinal.

3.9. Dado o seguinte problema de programação linear:

Máx. $Z = x_1 + 3x_2$ sujeito a

$$-x_1 + 2x_2 < 4$$
$$x_1 + x_2 < 6$$
$$x_1 + 3x_2 < 9$$

e $x_1 > 0;\ x_2 > 0.$

a) Achar a solução gráfica;

b) Resolver pelo método simplex e identificar as múltiplas soluções.

3.10. Determinar todas as soluções factíveis básicas do sistema:

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{3}$$
$$x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

3.11. Dado o sistema:

$$2x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$
$$6x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 6x_4 = 2$$

Achar todas as soluções factíveis básicas pelo processo da função objetivo artificial.

3.12. Resolver o seguinte problema de programação linear usando variáveis artificiais e aplicando os dois métodos (itens 3.8.2. e 3.8.3.):

Máx. $Z = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3$ sujeito a

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 7$$
$$-6x_1 + 20x_2 - 35x_3 = 17$$

e $x_1 > 0;\ x_2 > 0;\ x_3 > 0.$

3.13. Definir problemas lineares que permitam determinar se os seguintes sistemas de restrições têm soluções:

a) $Ax = b; \quad x > 0$

b) $Ax \leqslant b; \quad x \neq 0$

c) $Ax \leqslant b; \; Ax \neq b$

d) $Ax \leqslant b; \; Ax \nless b$

Em cada caso explicar como a programação linear proposta define se o sistema é factível ou não.

Problema do Transporte

Capítulo 4

4.1. Introdução

O modelo do transporte visa minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer n centros consumidores (destinos) a partir de m centros fornecedores (origens). As quantidades disponíveis, ou oferta, em cada origem são: $a_1, a_2, \ldots, a_m$. As quantidades requeridas, ou demanda, em cada destino são: $b_1, b_2, \ldots, b_n$. O custo unitário de transporte entre a origem i e o destino j é c_{ij}. Sendo x_{ij} a quantidade a ser transportada da origem i ao destino j o modelo toma o seguinte aspecto:

$$\text{Mín.} \quad Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \text{sujeito a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

e

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\,(j = 1, 2, \ldots, n).$$

Note-se que nas restrições do modelo (4.1) todos os coeficientes das variáveis são iguais a um.

Ao se somar as m restrições de oferta obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i. \tag{4.2}$$