Ana Paula da S. Vargas

FACULDADES DO BRASIL

ESCOLA POLITÉCNICA
CURSO DE SISTEMAS DE INFORMAÇÃO
DISCIPLINA DE PESQUISA OPERACIONAL

INTRODUÇÃO AO MÉTODO SIMPLEX

O desenvolvimento de um método (ou algoritmo) que determine a solução de um problema de programação linear (PPL) torna necessária a redução do problema a uma forma tal que permita a aplicação direta deste algoritmo.

No caso de programação linear, o algoritmo mais utilizado é o simplex.

Para que o simplex seja aplicado, é fundamental reduzir o PPL à ***forma-padrão***.

FORMA-PADRÃO DE UM PPL

Definição. A forma-padrão do PPL com m restrições e n variáveis pode ser representada como segue, com os coeficientes do lado direito necessariamente não negativos ($b_i \geq 0$, i = 1,2, ... , m).

$$
(*)\begin{cases}
\textbf{Máx (ou Mín) } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\textbf{s.a.} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad \textbf{onde} \quad b_i \geq 0 \quad (i = 1,2,\ldots, m) \\
\quad x_j \geq 0 \quad (j = 1,2,\ldots, n)
\end{cases}
$$

- Os dois últimos conjuntos de equações normalmente são denominados restrições do PPL;
- O último denomina-se condição de não negatividade;
- A primeira equação representa a função objetivo.

NOTAÇÃO MATRICIAL

$$
\begin{aligned}
\textbf{Máx (ou Mín) } z &= \mathbf{cx} \\
\textbf{s.a.} \quad \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq 0
\end{aligned}
$$

onde

A = matriz (m x n) dos coeficientes tecnológicos;

X = vetor coluna (n x 1) das variáveis de decisão;

b = vetor coluna (m x 1) do lado direito das restrições; $b \geq 0$, ou vetor dos recursos disponíveis;

c = vetor linha (1 x n) dos lucros (ou custos).

TRANSFORMAÇÃO DE UM PPL QUALQUER À FORMA PADRÃO

A forma-padrão implica que o primeiro grupo de restrições envolva somente igualdades e que todas as variáveis do modelo sejam não negativas.

a) <u>DESIGUALDADE DO TIPO MENOR OU IGUAL</u>

Seja uma restrição linear do tipo

$$\sum a_{ij} x_j \leq b_i$$

Esta será convertida em igualdade pela adição de uma nova variável, não negativa, ao lado esquerdo da desigualdade.

*Esta variável é numericamente igual à diferença entre os valores à direita e à esquerda da desigualdade e é conhecida como **variável de folga**.*

Ela representa o desperdício acarretado pela parte do sistema modelado pela restrição em pauta.

<u>SISTEMA CANÔNICO</u>

É aquele em que todas as restrições são do tipo menor ou igual.

REPRESENTAÇÀO MATRICIAL

$$\begin{aligned} &\textbf{Máx (ou Mín) } z = cx \\ &\textbf{s.a.} \quad Ax \leq b \ (b \geq 0) \qquad (1) \\ &\qquad\quad x \geq 0 \end{aligned}$$

VANTAGENS DO SISTEMA NA FORMA CANÔNICA PARA APLICAÇÃO DO MÉTODO SIMPLEX:

i) A passagem para a forma padrão se faz pelo simples acréscimo de uma variável de folga para cada equação;

ii) A forma-padrão resultante sempre consiste num sistema que tem uma solução básica óbvia, que corresponde a zerar as variáveis originais e resolver o problema em relação às variáveis de folga.

EXEMPLO: Acrescentar variáveis de folga ao sistema:

$$\begin{aligned} \textbf{Máx } z = 5x_1 + 2x_2 \\ \textbf{s.a. } \quad x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 \leq 9 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

b) <u>DESIGUALDADE DO TIPO MAIOR OU IGUAL</u>

Uma restrição linear do tipo

$$\sum a_{ij} x_j \geq b_i$$

Pode ser convertida em igualdade subtraindo-se ao lado esquerdo da desigualdade uma nova variável, não negativa.

*Esta variável é numericamente igual à diferença entre os valores à direita e à esquerda da desigualdade e é conhecida como **variável de excesso**.*

Ela representa um excesso das variáveis de entrada nesta parte do sistema modelada pela restrição em pauta.

c) <u>OCORRÊNCIA DE</u> $b_i < 0$

Bastará, neste caso, multiplicar a restrição i por -1, pois os coeficientes a_{ij} podem ter qualquer sinal.

d) <u>VARIÁVEIS SEM RESTRIÇÃO DE SINAL</u>

Chamam-se *livres* as variáveis que não tem qualquer restrição de sinal, isto é, podem assumir valores positivos, negativos ou valor nulo.

Seja x_k uma variável livre. Isto será indicado no modelo se escrevermos x_k é qualquer.

Podemos substituir x_k por duas variáveis, x'_k e x''_k, de maneira que $x_k = x'_k - x''_k$, sendo $x'_k \geq 0$ e $x''_k \geq 0$.

Evidentemente:

$$x_k > 0 \Leftrightarrow x'_k > x''_k$$

$$x_k = 0 \Leftrightarrow x'_k = x''_k$$

$$x_k < 0 \Leftrightarrow x'_k < x''_k$$

Assim, substituímos uma variável livre por duas variáveis positivas.

e) VARIÁVEL NÃO POSITIVA

Se o modelo for formulado com uma variável $x_k \leq 0$ basta substituí-la pela sua simétrica, isto é, basta fazer $x'_k = -x_k$ e substituir x_k por x'_k nas equações do problema.

f) EQUIVALÊNCIA ENTRE MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

Neste caso, basta substituir a função objetivo dada pela sua simétrica, assim.

EXEMPLO: Transformar o seguinte modelo à forma-padrão.

$$\begin{cases} \text{Min } z = -2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 \\ \text{s.a.} \quad x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 5 \\ \quad 4x_1 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq 0 \\ \quad -2x_3 + x_4 + 2x_5 \geq -7 \\ \quad 3x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = 8 \\ \quad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_3 \leq 0,\ x_4 \text{ qualquer} \end{cases}$$

DEFINIÇÕES:

Dado o problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Máx (ou Mín) } z &= cx \\ \text{s.a.} \quad Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

onde $A_{m\times n}$, $X_{n\times 1}$, $b_{m\times 1}$, $c_{1\times n}$, $n > m$, $r_A = m$ e $b \geq 0$, define-se:

a) uma solução factível, compatível ou viável é um vetor x que satisfaz as condições $A\,x = b$ e $x \geq 0$;

b) região factível, viável ou compatível é o conjunto de todas as soluções factíveis; se essa região é vazia, o programa linear é impossível ou inviável;

c) solução básica para $A\,x = b$ é uma solução obtida fazendo $m - n$ variáveis iguais à zero (variáveis não-básicas) e resolvendo em relação às demais (variáveis básicas);

d) uma solução básica factível é uma solução básica que também satisfaz $x \geq 0$; ela será ainda dita degenerada se alguma variável básica for nula;

e) solução ótima é o vetor factível x^* que otimiza o valor da função objetivo, $z^* = cx^*$; essa solução pode ser única ou podem haver ótimos alternativos x_1^* e x_2^*, quando $z^* = cx_1^* = cx_2^*$;

f) solução ilimitada (Máx $z \rightarrow +\infty$ ou Mín $\rightarrow -\infty$) é aquela em que há uma região factível, mas o ótimo não é finito.

TEOREMAS FUNDAMENTAIS

Serão enunciados e demonstrados os três teoremas nos quais o método simplex se baseia para que se possa entender, perfeitamente, o seu funcionamento.

TEOREMA I: "*O conjunto de todas as soluções factíveis do modelo de programação linear é um conjunto convexo.*"

TEOREMA II: "*Toda solução factível básica do sistema $A\,x = b$ é um ponto extremo do conjunto das soluções factíveis, isto é, do conjunto convexo do teorema anterior.*"

COROLÁRIO: "O conjunto de pontos extremos do conjunto das soluções factíveis é finito".

TEOREMA III:

a) "Se a função objetivo possui um máximo (mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo referido no teorema I.

b) "Se a função objetivo assume o máximo (mínimo) em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos".

Ana Paula da S. Vargas

O MÉTODO SIMPLEX

O Método Simplex compreende os seguintes passos:

i) Achar uma solução factível básica inicial;

ii) Verificar se a solução atual é ótima. Se for, pare;

iii) Determinar a variável não-básica que deve entrar na base;

iv) Determinar a variável básica que deve sair da base;

v) Achar a nova solução factível básica, e voltar ao passo ii).

EXEMPLO: Considere o seguinte modelo de programação linear:

$$
\begin{array}{llcl}
\textbf{Máx} & z = 5x_1 & +2x_2 & \\
\textbf{s.a.} & x_1 & & \leq 3 \\
 & & x_2 & \leq 4 \\
 & x_1 & +2x_2 & \leq 9 \\
 & & x_1, x_2 & \geq 0
\end{array}
$$